

COLLÈGE F-X. VOGT		Année scolaire 2021-2022
Département de Mathématiques	CONTRÔLE	Date : 09/10/2021
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES		
Niveau : TTI	Durée : 4 heures	Coefficient: 4

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15,5 POINTS)

Exercice 1: (5 points)

- 1) Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits en base 10 sous la forme \overline{abba} avec a un chiffre supérieur ou égal 2 et b un chiffre quelconque.
 - a) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11. 1pt
 - b) Quel est le nombre d'éléments de (E). 0,75pt
 - c) Montrer que tout élément de (E) est divisible par 3 si et seulement si $a + b$ est divisible par 3. 0,75pt
- 2) Démontrer en utilisant les congruences que : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 11. 1pt
- 3) Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre $A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n - 1}$.
 - a) Montrer que $A_n = 2n + 1 - \frac{10}{n-1}$. 0,5pt
 - b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles A_n est un entier relatif. 1pt

Exercice 2 : (5 points)

Soit le polynôme complexe $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (1 + 9i)z + 2 - 6i$.

- 1) Démontrer que P admet une unique racine réelle à déterminer. 1pt
- 2) Démontrer que P admet une unique racine imaginaire pure à déterminer. 1pt
- 3) Déterminer le complexe c tel que $P(z) = (z - 1)(z - 2i)(z - c)$. 0,75pt
- 4) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. 0,5pt
- 5) A, B et C sont les points d'affixes respectives 1 ; $2i$ et $-3 - i$.
 - a) Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère orthonormé. 1pt
 - b) D est le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer D puis donner ses coordonnées. 0,75pt

Exercice 3 : (5,5 points)

On considère l'application f définie dans l'ensemble \mathbb{C} des nombre complexe par

$$f(z) = \frac{z}{z+1} \text{ avec } z \neq -1.$$

- 1) Démontrer qu'il existe deux nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant la relation $f(z) = 1 + z$. 1,5pt
- 2) Déterminer le module de chacun des nombres z_1 et z_2 . 0,5pt
- 3) Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. 1,5pt
- 4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. 1pt
- 5) Déterminer et construire l'ensemble (T) des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel. 1pt

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (4,5 POINTS)

Situation :

Hermine, étudiante en agronomie, a effectué un stage dans une coopérative (GRVC) qui produit des huiles végétales. Plusieurs équipes de femmes participent aux activités parmi lesquelles le stockage des huiles dans les cuves. Si N ($120 < N < 129$) femmes de ce GRVC se constituent en équipes de 6 pour remplir les cuves, il en reste 4 pour s'occuper de l'entretien des lieux. Pour produire son rapport de stage, Hermine a besoin de certaines informations se trouvant dans l'ordinateur du chef de la coopérative qui ne souvient plus du mot de passe de sécurité. Ce dernier se souvient que le code de son mot de passe est « QFOOFK » et est noté sur un bout de papier. Pour le décoder, le chef a mis sur pied un processus de décodage qui stipule qu'à chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25 ; ensuite on continue avec les étapes suivantes :

Étape 1 : à la lettre que l'on veut décoder, on associe le nombre x correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $8m - 40$ par 27 et on le note r .

Étape 3 : Au nombre r , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Juste après son stage, Hermine a hérité d'un domaine sur lequel elle veut pouvoir construire plus tard son propre centre de formation en agronomie. Son frère Abel, s'intéresse au volet esthétique du centre. Compte tenu de la superficie du domaine, Abel veut qu'on installe un nombre a de chaises et un nombre b de tables pour les grandes cérémonies. D'après ses calculs, il se rend compte que le couple $(a; b)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ \text{PGCD}(a; b) = 20 \end{cases}$$

Tâches :

- 1) Aider Abel à trouver le nombre N de femmes du GRVC. 1,5pt
- 2) Aider Hermine à trouver le mot de passe de l'ordinateur du chef. 1,5pt
- 3) Déterminer les nombres de chaises et de tables à installer par Hermine. 1,5pt